

Ensemble de Besicovitch et Kakeya

Projet L3 MFA

Bonhomme Elise et Lenotte Laura

16 mai 2017

Table des matières

1	Point Historique	2
2	Construction des outils pour la théorie de Kakeya et Besicovitch	4
2.1	1 ^{er} outil : Réduction d'aire	4
2.2	À partir d'un triangle T : Découpages et translations pour réduire arbitrairement son aire	8
2.3	Problème des aiguilles parallèles	17
2.4	Construction de l'ensemble de Besicovitch	18
3	Bibliographie	24

Table des figures

1	Disque (<i>image.math.cnrs.fr/</i>)	2
2	Triangle de Reuleaux (<i>image.math.cnrs.fr/</i>)	2
3	Triangle équilatéral (<i>image.math.cnrs.fr/</i>)	2
4	Delfoïde (<i>image.math.cnrs.fr/</i>)	3
6	Figure résultante du lemme 2.1	5
7	Trapèze Tr	6
8	Partition de T en 2^k triangles élémentaires	9
9	Étape 0 : Subdivision de T en T_1, \dots, T_4	10
10	Étape 1 : Translation de T_{2i} vers T_{2i-1}	10
11	Étape 2 : Figure résultante S	11
12	Ensemble E	17
13	Étape 1 : Partition de T en T_1, T_2, T_3, T_4	19
14	Étape 1 : Translation de T_{2i} vers T_{2i-1}	19
15	Étape 2 : Figure résultante S_0	20
16	S_0 muni de trois paires d'antennes	21
17	U	22

1 Point Historique

En 1917, Kakeya pose le problème suivant : Quelle est la plus petite aire à l'intérieur de laquelle il est possible de déplacer une aiguille, de manière à la retourner complètement de manière continue ?

La réponse évidente est de faire tourner l'aiguille sur elle-même. La surface balayée est un disque dont l'aiguille est le diamètre. L'aire de cette figure est alors de $\pi(\frac{1}{2})^2 = \frac{\pi}{4} \approx 0.785$

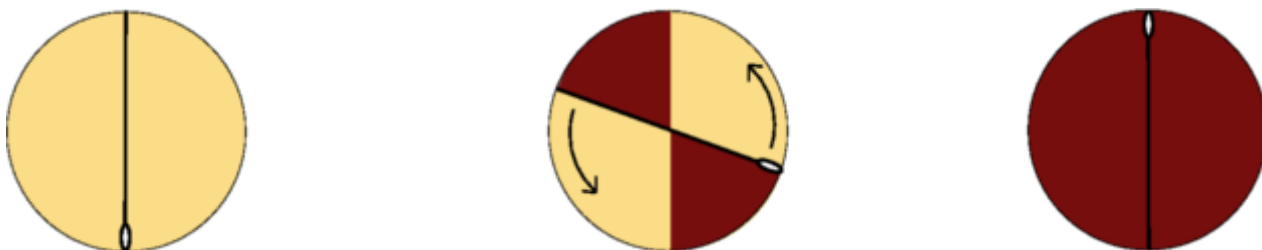


FIGURE 1 – Disque (*image.math.cnrs.fr/*)

Pour diminuer l'aire, on peut alors penser au triangle de Reuleaux, ou encore au triangle équilatéral dont la hauteur est la longueur de l'aiguille. Le calcul de l'aire nous donne pour le triangle de Reuleaux : $\frac{\pi - \sqrt{3}}{2} \approx 0.704$. En effet l'aire du triangle de Reuleaux est l'aire d'un demi disque de rayon $\frac{1}{2}$ auquel on soustrait deux fois l'aire du triangle équilatéral de côté 1. Pour le triangle équilatéral, on obtient une aire de $\frac{12}{\sqrt{3}} \approx 0.577$, qui est bien inférieur à 0.704.

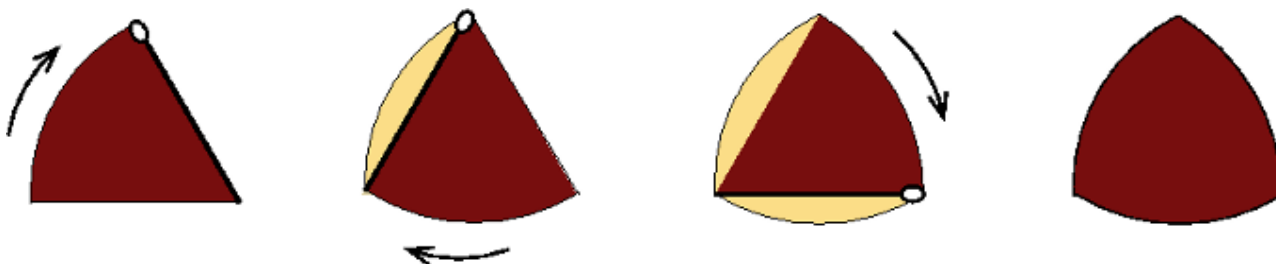


FIGURE 2 – Triangle de Reuleaux (*image.math.cnrs.fr/*)

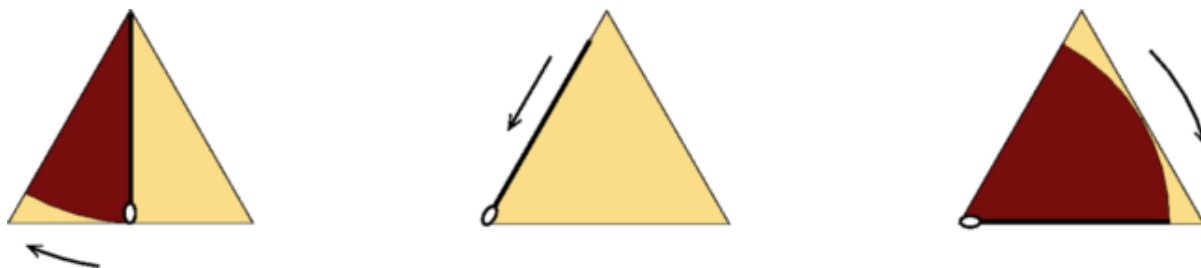
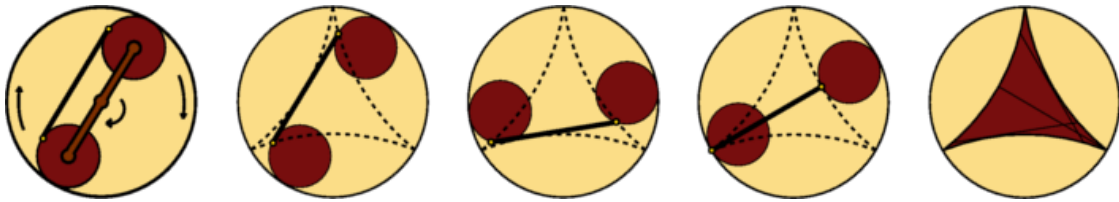


FIGURE 3 – Triangle équilatéral (*image.math.cnrs.fr/*)

Un candidat plus sérieux apparaît alors : la deltoïde. Son aire est égale à la moitié de celle du disque. L'aiguille peut se retourner totalement à l'intérieur, et le mouvement est optimisé au maximum. Du moins, c'est ce qu'on pensait pendant quelques années.

FIGURE 4 – Deltoïde (*image.math.cnrs.fr/*)

Les difficultés à montrer que la deltoïde est la figure recherchée ont rendu ce problème assez célèbre pour atteindre les oreilles d'Abram Besicovitch, qui donne alors une réponse assez inattendue au problème de Kakeya... En effet Besicovitch affirme en 1928 que l'on peut retourner continuellement une aiguille dans une figure dont l'aire est aussi petite que l'on veut !

Le but de ce projet est alors de comprendre la construction des ensembles de Besicovitch, appelée méthode des triangles.

2 Construction des outils pour la théorie de Kakeya et Besicovitch

Dans toute la suite, on munit \mathbb{R}^2 de la mesure de Lebesgue, \mathcal{A} .

2.1 1^{er} outil : Réduction d'aire

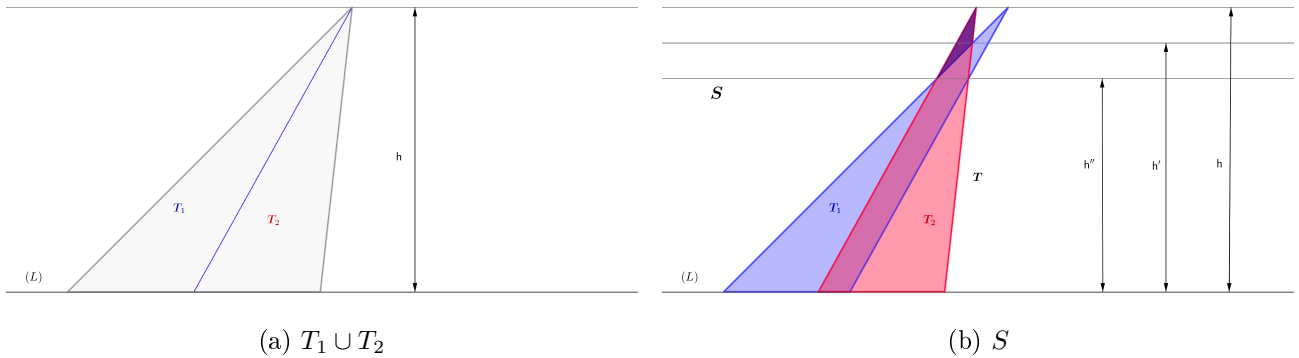
Lemme 2.1.

Soit T_1, T_2 , 2 triangles adjacents, de base de longueur b , alignée sur une droite (L) , et de hauteur h .

Soit $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1[$, alors :

En glissant T_2 d'une distance $c = 2(1 - \alpha)b$ le long de (L) (c'est à dire en le faisant partiellement recouvrir T_1), alors la figure résultante S consiste en :

- Un triangle T homothétique à $T_1 \cup T_2$ avec $\mathcal{A}(T) = \alpha^2 \mathcal{A}(T_1 \cup T_2)$, de hauteur h'
- Deux triangles auxiliaires, S_1 et S_2
- On a alors $h' = \alpha h$
- De sorte que la réduction d'aire totale soit de $\mathcal{A}(T_1 \cup T_2) - \mathcal{A}(S) = (1 - \alpha)(3\alpha - 1)\mathcal{A}(T_1 \cup T_2)$



Démonstration.

La démonstration suivante sera réalisée à l'aide d'outils géométriques élémentaires tels que le théorème de Thalès, ou encore le calcul de l'aire d'un trapèze. On aurait cependant pu simplifier les calculs en se plaçant dans un triangle T équilatéral plutôt que dans un triangle quelconque, à l'aide d'une transformation affine.

Étape 1 : Calcul de l'aire de T .

On utilise trois fois le théorème de Thalès :

- (1) Dans les triangles ADC et AKC' , les droites (KC') et (DC) sont parallèles :

$$\frac{AK}{AD} = \frac{AC'}{AC} = \frac{KC'}{DB} = \frac{2b - c}{2b}$$

- (2) Dans les triangles ADB et AIB' , les droites (IB') et (BD) sont parallèles :

$$\frac{AI}{AD} = \frac{AB'}{AB} = \frac{IB'}{DB} = \frac{b - c}{b}$$

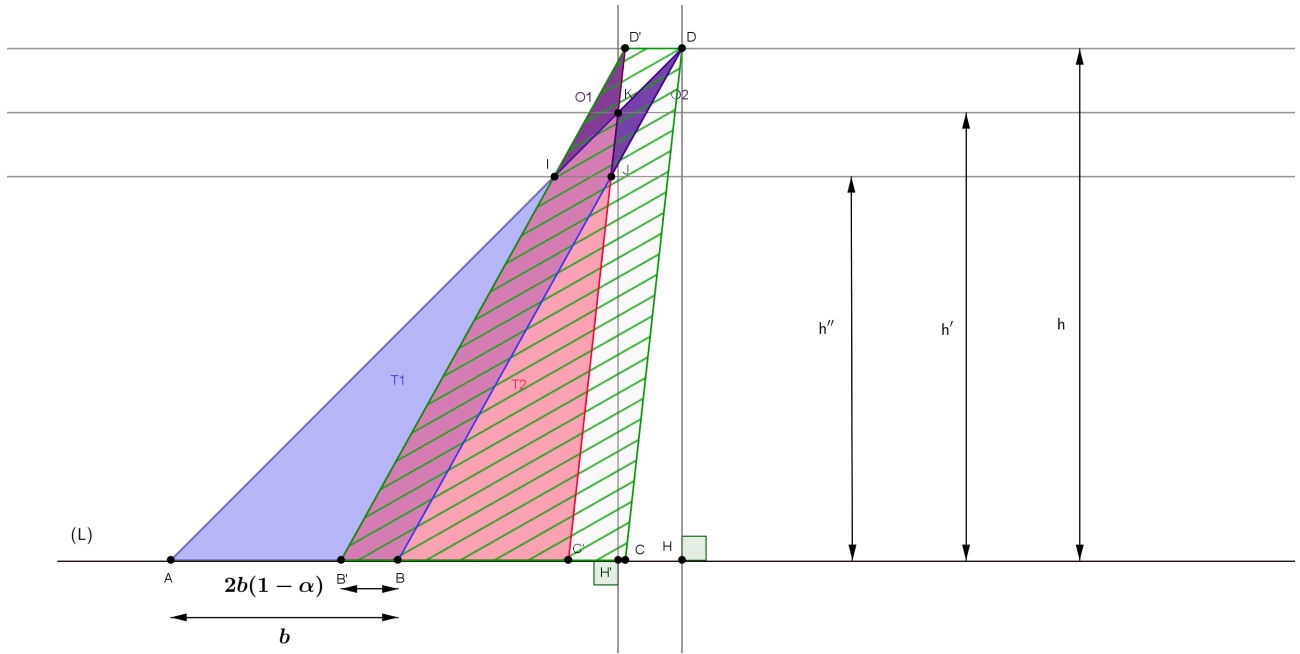


FIGURE 6 – Figure résultante du lemme 2.1

(3) Dans les triangles ADH et AKH' , les droites (KH') et (DH) sont parallèles :

$$\frac{AK}{AD} = \frac{AH'}{AH} = \frac{KH'}{DH} = \frac{h'}{h}$$

- L'équation (3) donne : $h' = h\left(\frac{AK}{AD}\right)$
- L'équation (1) donne : $h' = h\left(\frac{2b-c}{2b}\right) = h\left(1 - \frac{c}{2b}\right) = h\alpha$

Or on a $\mathcal{A}(T_1 \cup T_2) = \frac{h(2b)}{2} = hb$, donc :

$$\mathcal{A}(T) = \frac{h'(2b-c)}{2} = \frac{h'(2b\alpha)}{2} = b\alpha^2 h = \alpha^2 \mathcal{A}(T_1 \cup T_2)$$

Étape 2 : Calcul de $\mathcal{A}(O_2) = \mathcal{A}(JKD)$

On considère le trapèze $B'D'DC$ qu'on note Tr .

- On a d'une part :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(Tr) &= \frac{(c+b+c)h}{2} \\ &= \frac{bh(4(1-\alpha)+1)}{2} \\ &= \frac{bh(5-4\alpha)}{2} \end{aligned} \tag{1}$$

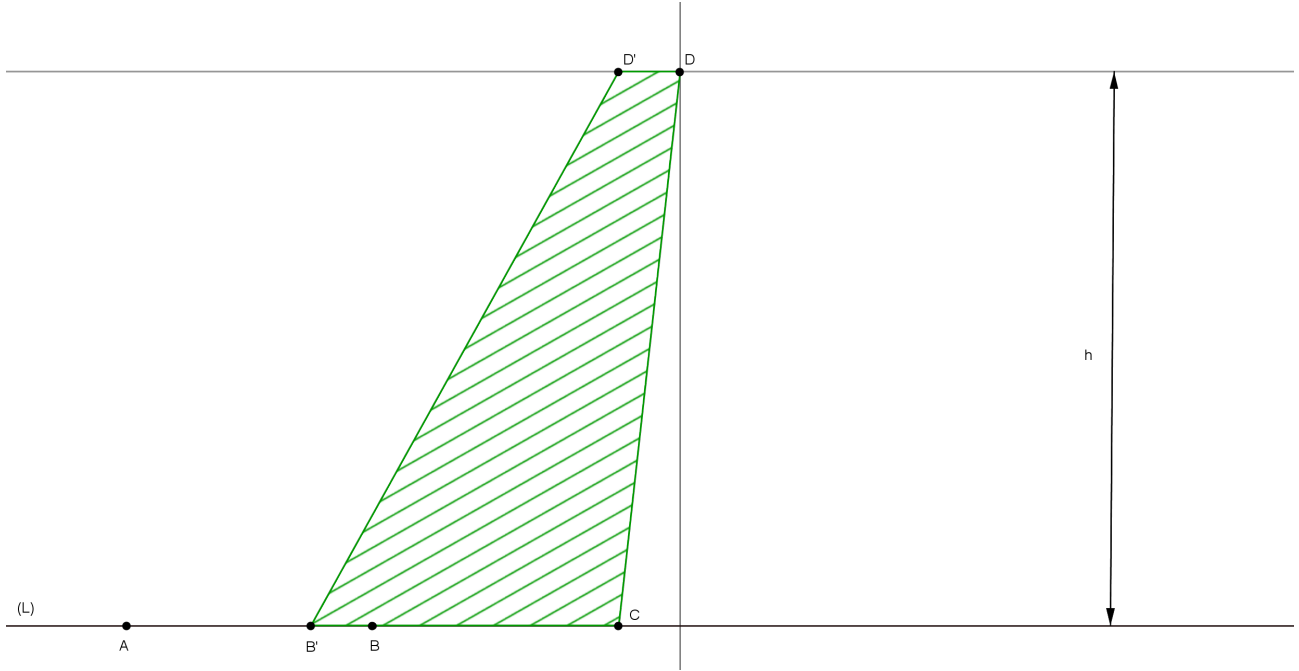


FIGURE 7 – Trapèze Tr

- D'autre part :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(Tr) &= \mathcal{A}(T_2) + \mathcal{A}(O_2) - \mathcal{A}(BJC') \\
 &= bh + \frac{c(h-h')}{2} - \mathcal{A}(BJC') + \mathcal{A}(O_2) \\
 &= bh + \frac{2b(1-\alpha)(1-\alpha)h}{2} - \mathcal{A}(BJC') + \mathcal{A}(O_2) \\
 &= bh(1 + (1-\alpha)^2) - \mathcal{A}(BJC') + \mathcal{A}(O_2)
 \end{aligned} \tag{2}$$

- Calculons $\mathcal{A}(BJC')$:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(BJC') &= \frac{(b-c)h''}{2} \\
 &= \frac{b(2\alpha-1)}{2}h''
 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\mathcal{A}(D'DJ) = \mathcal{A}(D'DK) + \mathcal{A}(O_2) \Leftrightarrow \frac{(h-h'')c}{2} = (1-\alpha)^2hb + \mathcal{A}(O_2)$$

Donc

$$\mathcal{A}(O_2) = \frac{(h-h'')c}{2} - (1-\alpha)^2hb \tag{4}$$

(1), (2), (3) et (4) donnent :

$$\begin{aligned}
\frac{bh(5-4\alpha)}{2} &= bh(1+(1-\alpha)^2) - \frac{b(2\alpha-1)h''}{2} + \frac{(h-h'')c}{2} - (1-\alpha)^2hb \\
\Leftrightarrow bh\left(\frac{5-4\alpha}{2} - 1 - (1-\alpha)\right) &= -h''\left(\frac{b(2\alpha-1)}{2} + b(1-\alpha)\right) = -h''\left(\frac{b}{2}\right) \\
\Leftrightarrow -h'' &= 2h\left(\frac{5-4\alpha-2-2+2\alpha}{2}\right) = h(1-2\alpha) \\
\Leftrightarrow h'' &= h(2\alpha-1)
\end{aligned} \tag{5}$$

• Conclusion : On reprend (4) et (5) :

$$\mathcal{A}(O_2) = \frac{h(1-(2\alpha-1))c}{2} - (1-\alpha)^2hb = h(1-\alpha)2b(1-\alpha) - (1-\alpha)^2hb$$

On obtient finalement :

$$\mathcal{A}(O_2) = 2hb(1-\alpha)^2 - hb(1-\alpha)^2 = hb(1-\alpha)^2 \tag{6}$$

Étape 3 : Calcul de $\mathcal{A}(O_1) = \mathcal{A}(IKD')$:

• On a d'une part :

$$\mathcal{A}(T_2) = \mathcal{A}(T) + \mathcal{A}(O_1) - \mathcal{A}(AB'I) = \frac{bh}{2}$$

• Or,

$$\mathcal{A}(AB'I) = \frac{h''(b-c)}{2}, \quad h'' = B'I$$

On utilise le théorème de Thalès :

— Dans les triangles ADB et ABI' , les droites IB' et DB sont parallèles :

$$\frac{AI}{AD} = \frac{AB'}{AB} = \frac{b-c}{b} = 2\alpha - 1$$

— Dans le triangle ADH :

$$\frac{AI}{AD} = \frac{h''}{h}$$

On a ainsi $h' = (2\alpha - 1)h$, d'où

$$\mathcal{A}(AB'I) = \frac{hb}{2}(2\alpha - 1)^2$$

- De plus :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(O_1) &= \frac{hb}{2} - \alpha^2 hb + \frac{hb}{2}(2\alpha - 1)^2 \\
&= \frac{hb}{2}(1 - 2\alpha^2 + 4\alpha^2 + 1 - 4\alpha) \\
&= \frac{hb}{2}(2 - 4\alpha + 2\alpha^2) \\
&= hb(1 - \alpha)^2 \\
&= \mathcal{A}(O_2)
\end{aligned}$$

Étape 4 : Calcul de la réduction d'aire totale :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(T_1 \cup T_2) - \mathcal{A}(S) &= bh - \alpha^2 hb - 2hb(1 - \alpha)^2 \\
&= bh(-1 + 4\alpha - 3\alpha^2) \\
&= bh(1 - \alpha)(3\alpha - 1) \\
&= (1 - \alpha)(3\alpha - 1)\mathcal{A}(T_1 \cup T_2)
\end{aligned}$$

□

Grâce à ce premier lemme, nous allons faire un premier pas vers la réponse de Besicovitch au problème de Kakeya :

A partir d'un triangle quelconque, T , nous allons construire un ensemble du plan, S , d'aire aussi petite que souhaitée. Gardons en tête qu'à terme, nous voulons construire un ensemble du plan d'aire aussi petite que souhaitée, où l'on puisse continuellement retourner une aiguille de longueur unité.

La figure S est un point de départ dans la construction d'un tel ensemble, néanmoins il faudra la "compléter" quelque peu pour qu'une rotation continue d'angle π de l'aiguille y soit possible.

C'est ce que nous ferons dans un deuxième temps, après avoir enrichi nos bagages d'autres outils.

2.2 À partir d'un triangle T : Découpages et translations pour réduire arbitrairement son aire

Théoreme 2.1.

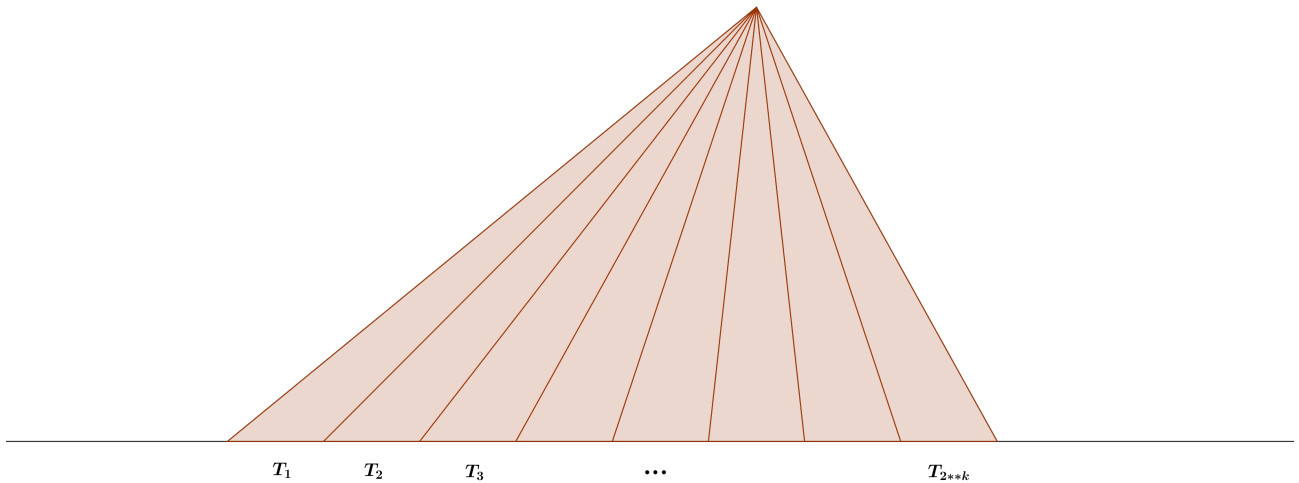
Soit T un triangle du plan, de base de longueur b alignée sur une droite (L) , et de hauteur h . On divise la base de T en 2^k segments de même longueur, ($k \in \mathbb{N}$), de sorte que l'on forme 2^k triangles élémentaires T_1, \dots, T_{2^k} , tous de même aire $\frac{hb}{2^{k+1}}$. (Cf schéma ci-dessous)

En prenant k suffisamment grand, il est possible de translater les 2^k triangles élémentaires le long de (L) , de sorte que la figure résultante S soit d'aire aussi petite que souhaitée.

De plus, $\forall V \subset \mathbb{R}^2$ ouvert contenant T , il est possible d'effectuer ces translations sans sortir de V , ie tel que $S \subset V$.

Démonstration.

Soient $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1[$, et $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

FIGURE 8 – Partition de T en 2^k triangles élémentaires**Arguments heuristiques :**

Nous allons traduire les 2^k triangles élémentaires deux par deux, puis les figures intermédiaires obtenues deux par deux, et ainsi de suite jusqu'à n'obtenir qu'une figure résultante S . Cela nécessite k étapes. En choisissant k assez grand, et les constantes de translations dépendamment d'un α bien choisi, on peut obtenir S d'aire aussi petite que souhaitée, car S vérifie :

$$\mathcal{A}(S) \leq (1 - (1 - \alpha)(3\alpha - 1)[1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \dots + (\alpha^2)^{k-1}])\mathcal{A}(T).$$

Remarque : k est aussi le nombre d'étapes pour construire l'ensemble S .

Temps 1 :

Afin de saisir au mieux les opérations géométriques et raisonnements de la démonstration, nous allons d'abord rédiger entièrement le cas $k = 2$, qui servira de support pour fixer les idées dans le cas général :

Étape 0 : On divise T en $4 = 2^2$ triangles élémentaires T_1, \dots, T_4 .

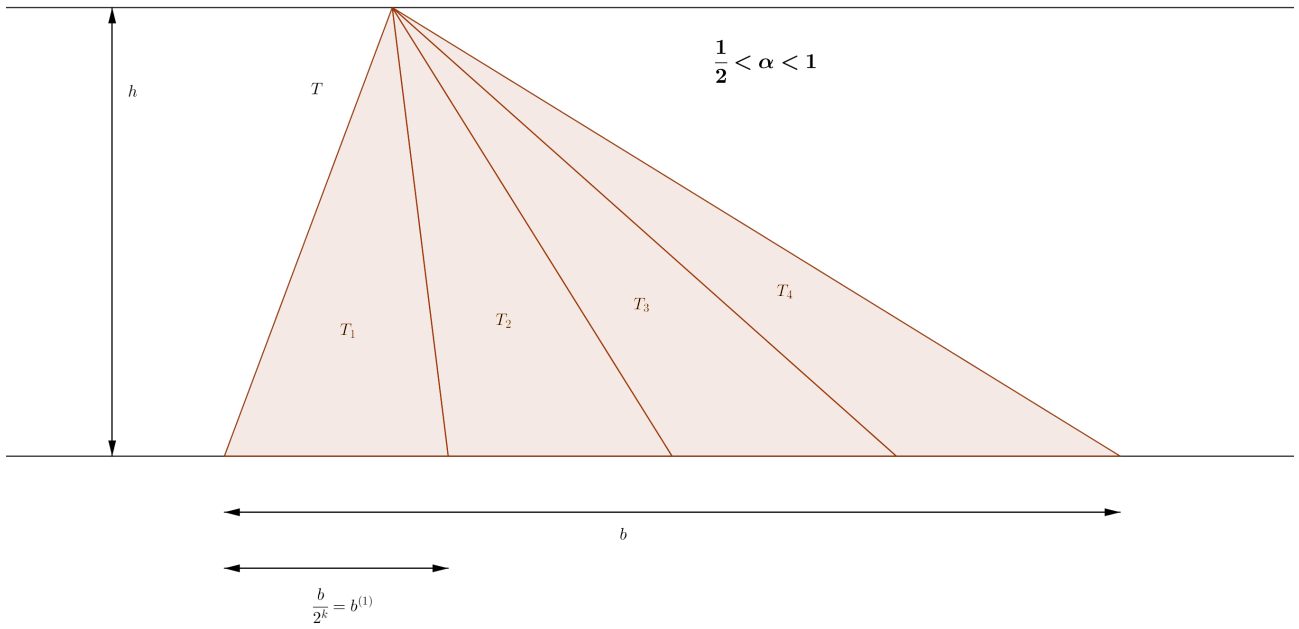


FIGURE 9 – Étape 0 : Subdivision de T en T_1, \dots, T_4

Étape 1 : On translate, $\forall i \in \llbracket 1, 2 \rrbracket$, T_{2i} vers T_{2i-1} d'une distance $c^{(1)} = 2(1 - \alpha)b^{(1)}$, où $b^{(1)} = \frac{b}{2^2}$.

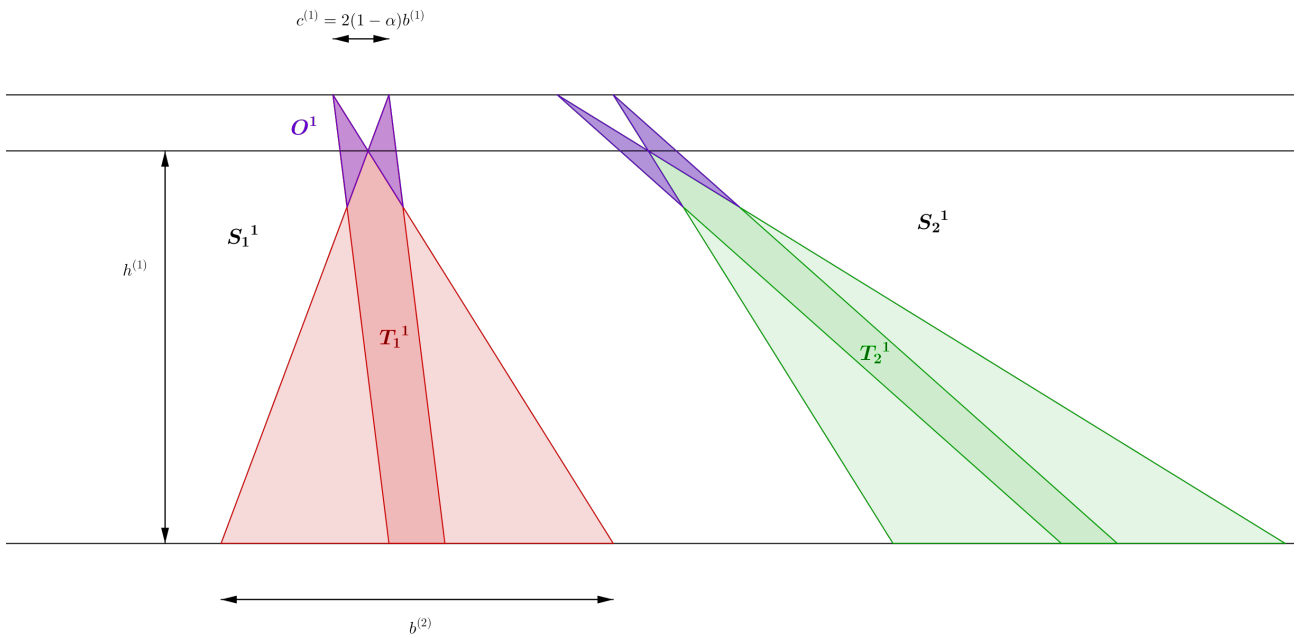


FIGURE 10 – Étape 1 : Translation de T_{2i} vers T_{2i-1}

Par le lemme 2.1, on obtient deux figures S_1^1 et S_2^1 formées chacune de :

- un triangle T_i^1 homothétique à $T_{2i-1} \cup T_{2i}$, d'aire $\alpha^2(\mathcal{A}(T_{2i-1} \cup T_{2i})) = \alpha^2 \frac{hb}{2^2}$, de base $b^{(2)} = 2b^{(1)} - c^{(1)} = 2\alpha b^{(1)}$, et de hauteur $h^{(1)} = \alpha h$.
- deux triangles auxiliaires, tous d'aire $\mathcal{A}(O^1) = (1 - \alpha)^2 \frac{hb}{2^2} = hb^{(1)}(1 - \alpha)^2$. (Nous les appellerons les oreilles de génération 1.)

- de sorte que la réduction d'aire soit de :

$$\mathcal{A}(T_{2i-1} \cup T_{2i}) - \mathcal{A}(S_i^1) = (1 - \alpha)(3\alpha - 1)\mathcal{A}(T_{2i-1} \cup T_{2i})$$

Étape 2 : On translate S_2^1 vers S_1^1 le long de (L) , d'une distance $c^{(2)} = 2(1 - \alpha)b^{(2)} = 2(1 - \alpha)2\alpha b^{(1)} = 4\alpha(1 - \alpha)b^{(1)}$.

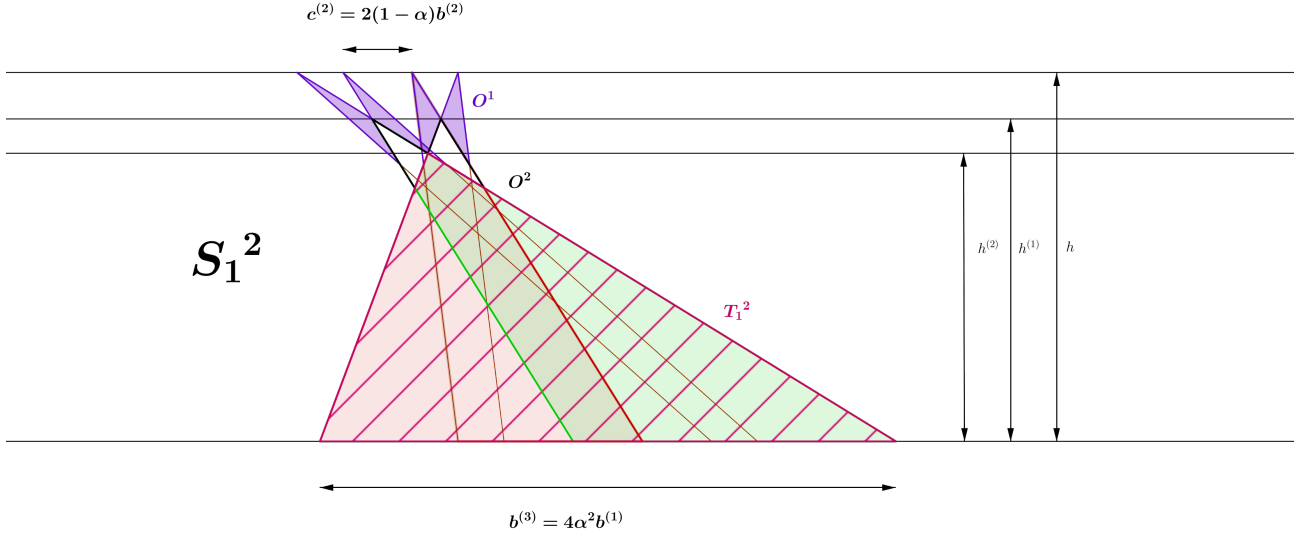


FIGURE 11 – Étape 2 : Figure résultante S

Puisque le côté droit de T_1^1 est parallèle au côté gauche de T_2^1 , par le lemme 2.1 appliqué aux deux triangles homothétiques T_1^1 et T_2^1 , on obtient une figure résultante S_1^2 formée de :

- un triangle T_1^2 homothétique à $T_1^1 \cup T_2^1$, de base $b^{(3)} = 2b^{(2)} - c^{(2)} = 4\alpha^2 b^{(1)}$, d'aire $\mathcal{A}(T_1^2) = \alpha^2 \mathcal{A}(T_1^1 \cup T_2^1) = \alpha^4 \mathcal{A}(T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4) = \alpha^4 \mathcal{A}(T)$,
- les quatre oreilles de génération 1, et deux nouvelles oreilles de génération 2, $O^{(2)}$, qui se chevauchent partiellement,
- de sorte que $\mathcal{A}(O^2) = h^{(1)}b^{(2)}(1 - \alpha)^2 = 2\alpha \mathcal{A}(O^1)$,
- avec T_1^2 de hauteur $h^{(2)} = \alpha^2 h$
- et enfin avec une réduction d'aire de :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(T_1^1 \cup T_2^1) - \mathcal{A}(T_1^2) - 2\mathcal{A}(O^2) &= (1 - \alpha)(3\alpha - 1)\mathcal{A}(T_1^1 \cup T_2^1) \\ &= (1 - \alpha)(3\alpha - 1)\alpha^2 \mathcal{A}(T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4) \\ &= (1 - \alpha)(3\alpha - 1)\alpha^2 \mathcal{A}(T). \end{aligned}$$

Ici, $S = S_1^2$, et on a :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(S) &\leq \mathcal{A}(T_1^2) + 2\mathcal{A}(O^2) + 4\mathcal{A}(O^1) \\
 &= \mathcal{A}(T_1^1 \cup T_2^1) + 4\mathcal{A}(O^1) - (\mathcal{A}(T_1^1 \cup T_2^1) - \mathcal{A}(T_1^2) - 2\mathcal{A}(O^2)) \\
 &= \mathcal{A}(T_1 \cup T_2) - [\mathcal{A}(T_1 \cup T_2) - \mathcal{A}(T_1^1) - 2\mathcal{A}(O^1)] \\
 &\quad + \mathcal{A}(T_3 \cup T_4) - [\mathcal{A}(T_3 \cup T_4) - \mathcal{A}(T_2^1) - 2\mathcal{A}(O^1)] \\
 &\quad - (1 - \alpha)(3\alpha - 1)\mathcal{A}(T_1^1 \cup T_2^1) \\
 &= \mathcal{A}(T) - (1 - \alpha)(3\alpha - 1)\mathcal{A}(T_1 \cup T_2) - (1 - \alpha)(3\alpha - 1)\mathcal{A}(T_3 \cup T_4) \\
 &\quad - (1 - \alpha)(3\alpha - 1)[\alpha^2 \mathcal{A}(T_1 \cup T_2) + \alpha^2 \mathcal{A}(T_3 \cup T_4)] \\
 &= \mathcal{A}(T)[1 - (1 - \alpha)(3\alpha - 1)(1 + \alpha^2)]
 \end{aligned}$$

Ainsi, pour $k = 2$, on a construit en deux étapes une figure résultante S , telle que $\mathcal{A}(S) \leq \mathcal{A}(T)[1 - (1 - \alpha)(3\alpha - 1)(1 + \alpha^2)]$.

Temps 2 : Dans le cas général, $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, nous allons construire une figure S à partir de T en translatant les 2^k triangles élémentaires, de sorte que

$$\mathcal{A}(S) \leq (1 - (1 - \alpha)(3\alpha - 1)[1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \dots + (\alpha^2)^{k-1}])\mathcal{A}(T).$$

Étape 0 : On découpe la base de T en 2^k triangles élémentaires :

- $T = \bigcup_{i=1}^{2^k} T_i$,
- tous les T_i sont de hauteur $h^{(0)} = h$ et de base $b^{(1)} = \frac{b}{2^k}$, donc d'aire $\frac{hb^{(1)}}{2}$.

Étape 1 : $\forall i \in \llbracket 1, 2^{k-1} \rrbracket$, on translate T_{2i} vers T_{2i-1} le long de (L) d'une distance $c^{(1)} = 2(1 - \alpha)b^{(1)}$. On a ainsi formé, via le lemme 2.1, 2^{k-1} figures résultantes S_i^1 , telles que $\forall i \in \llbracket 1, 2^{k-1} \rrbracket$, $S_i^1 = T_i^1 \cup O_{i,1}^1 \cup O_{i,2}^1$, avec

- T_i^1 est un triangle homothétique à $T_{2i-1} \cup T_{2i}$,
- T_i^1 est de hauteur $h^{(1)} = \alpha h$, et de base $b^{(2)} = 2b^{(1)} - c^{(1)} = 2\alpha b^{(1)}$,
- T_i^1 est d'aire $\mathcal{A}(T_i^1) = \alpha^2 \mathcal{A}(T_{2i-1} \cup T_{2i})$,
- $O_{i,1}^1$ et $O_{i,2}^1$ sont les deux oreilles de génération 1 associées à S_i^1 , de même aire notée :

$$\mathcal{A}(O^1) = (1 - \alpha)^2 hb^{(1)}$$

- de sorte que l'on ait une réduction d'aire de :

$$\mathcal{A}(T_{2i-1} \cup T_{2i}) - \mathcal{A}(S_i^1) = (1 - \alpha)(3\alpha - 1)\mathcal{A}(T_{2i-1} \cup T_{2i})$$

A ce stade, il y a 2^k oreilles de génération 1.

Étape 2 : $\forall i \in \llbracket 1, 2^{k-2} \rrbracket$, on translate (après les avoir juxtaposés) S_{2i}^1 vers S_{2i-1}^1 le long de (L) , d'une distance $c^{(2)} = 2(1 - \alpha)b^{(2)} = 4\alpha(1 - \alpha)b^{(1)}$.

Puisque la hauteur commune $h^{(1)}$ des T_i^1 ne dépend pas de $i \in \llbracket 1, 2^{k-1} \rrbracket$, et puisque le côté droit de T_{2i-1}^1 est parallèle au côté gauche de T_{2i}^1 , $\forall i \in \llbracket 1, 2^{k-2} \rrbracket$, on peut appliquer le lemme 2.1 aux couples (T_{2i-1}^1, T_{2i}^1) .

On forme ainsi 2^{k-2} figures résultantes S_i^2 , telles que $\forall i \in \llbracket 1, 2^{k-2} \rrbracket$, $S_i^2 = T_i^2 \cup O_{i,1}^2 \cup O_{i,2}^2 \cup \{4 \text{ bouts de } O^1\}$, avec

- T_i^2 est un triangle homothétique à $T_{2i-1}^1 \cup T_{2i}^1$,

- T_i^2 est de hauteur $h^{(2)} = \alpha h^{(1)} = \alpha^2 h$, et de base $b^{(3)} = 2b^{(2)} - c^{(2)} = (2\alpha)^2 b^{(1)}$,
- T_i^2 est d'aire $\mathcal{A}(T_i^2) = \alpha^2 \mathcal{A}(T_{2i-1}^1 \cup T_{2i}^1)$,
- $O_{i,1}^2$ et $O_{i,2}^2$ sont les deux oreilles de génération 2 associées à T_i^2 , de même aire notée :

$$\mathcal{A}(O^2) = (1 - \alpha)^2 h^{(1)} b^{(2)} = 2\alpha^2 (1 - \alpha)^2 h b^{(1)}$$

- quatre "morceaux" d'oreilles de génération 1,
- de sorte que l'on ait une réduction d'aire de :

$$\mathcal{A}(T_{2i-1}^1 \cup T_{2i}^1) - \mathcal{A}(T_i^2) - 2\mathcal{A}(O^2) = (1 - \alpha)(3\alpha - 1)\mathcal{A}(T_{2i-1}^1 \cup T_{2i}^1)$$

A ce stade, il y a 2^{k-1} oreilles de génération 2.

Étape 3 : $\forall i \in \llbracket 1, 2^{k-3} \rrbracket$, on translate (après les avoir juxtaposés) S_{2i}^2 vers S_{2i-1}^2 le long de (L) , d'une distance $c^{(3)} = 2(1 - \alpha)b^{(3)} = 2(2\alpha)^2(1 - \alpha)b^{(1)}$.

Puisque la hauteur commune $h^{(2)}$ des T_i^2 ne dépend pas de $i \in \llbracket 1, 2^{k-2} \rrbracket$, et puisque le côté droit de T_{2i-1}^2 est parallèle au côté gauche de T_{2i}^2 , $\forall i \in \llbracket 1, 2^{k-3} \rrbracket$, on peut appliquer le lemme 2.1 aux couples (T_{2i-1}^2, T_{2i}^2) .

On forme ainsi 2^{k-3} figures résultantes S_i^3 , telles que $\forall i \in \llbracket 1, 2^{k-3} \rrbracket$, $S_i^3 = T_i^3 \cup O_{i,1}^3 \cup O_{i,2}^3 \cup \{4 \text{ bouts de } O^2\} \cup \{8 \text{ bouts de } O^1\}$, avec

- T_i^3 est un triangle homothétique à $T_{2i-1}^2 \cup T_{2i}^2$,
- T_i^3 est de hauteur $h^{(3)} = \alpha h^{(2)} = \alpha^3 h$, et de base $b^{(4)} = 2b^{(3)} - c^{(3)} = (2\alpha)^3 b^{(1)}$,
- T_i^3 est d'aire $\mathcal{A}(T_i^3) = \alpha^2 \mathcal{A}(T_{2i-1}^2 \cup T_{2i}^2)$,
- $O_{i,1}^3$ et $O_{i,2}^3$ sont les deux oreilles de génération 3 associées à T_i^3 , de même aire notée :

$$\mathcal{A}(O^3) = (1 - \alpha)^2 h^{(2)} b^{(3)} = 4\alpha^4 (1 - \alpha)^2 h b^{(1)}$$

- quatre "morceaux" d'oreilles de génération 2, et huit de génération 1,
- de sorte que l'on ait une réduction d'aire de :

$$\mathcal{A}(T_{2i-1}^2 \cup T_{2i}^2) - \mathcal{A}(T_i^3) - 2\mathcal{A}(O^3) = (1 - \alpha)(3\alpha - 1)\mathcal{A}(T_{2i-1}^2 \cup T_{2i}^2)$$

A ce stade, il y a 2^{k-2} oreilles de génération 3.

Étape r, $r \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$:

A ce stade, on a 2^{k-r+1} figures S_i^{r-1} , 2^{k-r+2} oreilles de génération r-1, 2^{k-r+1} triangles T_i^{r-1} de base commune $b^{(r)} = (2\alpha)^{r-1} b^{(1)}$, et de hauteur commune $h^{(r-1)} = \alpha^{r-1} h$.

Pour tout $i \in \llbracket 1, 2^{k-r} \rrbracket$, on translate (après les avoir juxtaposés) S_{2i}^{r-1} vers S_{2i-1}^{r-1} le long de (L) , d'une distance $c^{(r)} = 2(1 - \alpha)b^{(r)} = 2(2\alpha)^{r-1}(1 - \alpha)b^{(1)}$.

Puisque la hauteur commune $h^{(r-1)}$ des T_i^{r-1} ne dépend pas de $i \in \llbracket 1, 2^{k-r+1} \rrbracket$, et puisque le côté droit de T_{2i-1}^{r-1} est parallèle au côté gauche de T_{2i}^{r-1} , $\forall i \in \llbracket 1, 2^{k-r} \rrbracket$, on peut appliquer le lemme 2.1 aux couples $(T_{2i-1}^{r-1}, T_{2i}^{r-1})$.

On forme ainsi 2^{k-r} figures résultantes S_i^r , telles que $\forall i \in \llbracket 1, 2^{k-r} \rrbracket$,

$$S_i^r = T_i^r \cup O_{i,1}^r \cup O_{i,2}^r \cup \bigcup_{j=1}^{r-1} \{2^{j+1} \text{ bouts de } O^{r-j}\}$$

avec

- T_i^r est un triangle homothétique à $T_{2i-1}^{r-1} \cup T_{2i}^{r-1}$,
- T_i^r est de hauteur $h^{(r)} = \alpha h^{(r-1)} = \alpha^r h$, et de base $b^{(r+1)} = 2b^{(r)} - c^{(r)} = (2\alpha)^r b^{(1)}$,
- T_i^r est d'aire $\mathcal{A}(T_i^r) = \alpha^2 \mathcal{A}(T_{2i-1}^{r-1} \cup T_{2i}^{r-1})$,
- $O_{i,1}^r$ et $O_{i,2}^r$ sont les deux oreilles de génération r associées à T_i^r , de même aire notée :

$$\mathcal{A}(O^r) = (1 - \alpha)^2 h^{(r-1)} b^{(r)} = 2^{r-1} \alpha^{2(r-1)} (1 - \alpha)^2 h b^{(1)}$$

- $\forall j \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket$, 2^{j+1} "morceaux" d'oreilles de génération $r-j$,
- de sorte que l'on ait une réduction d'aire de :

$$\mathcal{A}(T_{2i-1}^{r-1} \cup T_{2i}^{r-1}) - \mathcal{A}(T_i^r) - 2\mathcal{A}(O^r) = (1-\alpha)(3\alpha-1)\mathcal{A}(T_{2i-1}^{r-1} \cup T_{2i}^{r-1})$$

A ce stade, il y a 2^{k-r+1} oreilles de génération r .

Étape k : À ce stade, il reste seulement les deux figures S_1^{k-1} et S_2^{k-1} , qui contiennent entre autres les quatre oreilles de génération $k-1$, les deux triangles T_1^{k-1} et T_2^{k-1} de base commune $b^{(k)} = (2\alpha)^{k-1}b^{(1)}$, et de hauteur commune $h^{(k-1)} = \alpha^{k-1}h$.

On translate (après les avoir juxtaposés) S_2^{k-1} vers S_1^{k-1} le long de (L) , d'une distance $c^{(k)} = 2(1-\alpha)b^{(k)} = 2(2\alpha)^{k-1}(1-\alpha)b^{(1)}$.

Puisque T_1^{k-1} et T_2^{k-1} ont la même hauteur $h^{(k-1)}$, et puisque le côté droit de T_1^{k-1} est parallèle au côté gauche de T_2^{k-1} , on peut appliquer le lemme 2.1 à (T_1^{k-1}, T_2^{k-1}) .

On obtient ainsi la figure résultante $S = S_1^k$, telle que :

$$S = T_1^k \cup O_{1,1}^k \cup O_{1,2}^k \cup \bigcup_{j=1}^{k-1} \{2^{j+1} \text{ bouts de } O^{k-j}\}$$

avec :

- T_1^k est un triangle homothétique à $T_1^{k-1} \cup T_2^{k-1}$,
- T_1^k est de hauteur $h^{(k)} = \alpha h^{(k-1)} = \alpha^k h$, et de base $b^{(k+1)} = 2b^{(k)} - c^{(k)} = (2\alpha)^k b^{(1)}$,
- T_1^k est d'aire $\mathcal{A}(T_1^k) = \alpha^2 \mathcal{A}(T_1^{k-1} \cup T_2^{k-1})$,
- $O_{1,1}^k$ et $O_{1,2}^k$ sont les deux oreilles de génération k associées à T_1^k , de même aire notée :

$$\mathcal{A}(O^k) = (1-\alpha)^2 h^{(k-1)} b^{(k)} = 2^{k-1} \alpha^{2(k-1)} (1-\alpha)^2 h b^{(1)}$$

- $\forall j \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$, 2^{j+1} "morceaux" d'oreilles de génération $k-j$,
- de sorte que l'on ait une réduction d'aire de :

$$\mathcal{A}(T_1^{k-1} \cup T_2^{k-1}) - \mathcal{A}(T_1^k) - 2\mathcal{A}(O^k) = (1-\alpha)(3\alpha-1)\mathcal{A}(T_1^{k-1} \cup T_2^{k-1})$$

A ce stade, il y a deux oreilles de génération k .

Temps 3 : Majorons $\mathcal{A}(S)$:

Par les étapes qui précèdent, on a :

$$\mathcal{A}(S) \leq \mathcal{A}(T_1^k) + 2\mathcal{A}(O^k) + \sum_{j=1}^{k-1} 2^{j+1} \mathcal{A}(O^{k-j}) = \mathcal{B}$$

(On majore l'aire de S en ne prenant pas en compte les recouvrements des oreilles des différentes générations.)

Temps 4 : Calculons le terme de droite, \mathcal{B} :

Pour calculer explicitement \mathcal{B} , nous allons partir de son expression et "remonter" toutes les étapes pour se ramener à l'aire de T , en utilisant les relations de réductions d'aires obtenues à chacune des k étapes qui ont amené à la construction de S .

A l'étape r , $r \in \llbracket 1, k \rrbracket$, on a la réduction d'aire :

$\forall i \in \llbracket 1, 2^{k-r} \rrbracket$:

$$\mathcal{A}(T_i^r) + 2\mathcal{A}(O^r) = [1 - (1-\alpha)(3\alpha-1)]\mathcal{A}(T_{2i-1}^{r-1} \cup T_{2i}^{r-1})$$

Et :

$$\mathcal{A}(T_i^r) = \alpha^2 \mathcal{A}(T_{2i-1}^{r-1} \cup T_{2i}^{r-1})$$

Allons-y étape par étape :

Étape 1 :

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \mathcal{A}(T_1^k) + 2\mathcal{A}(O^k) + \sum_{j=1}^{k-1} 2^{j+1} \mathcal{A}(O^{k-j}) \\ &= (1 - (1 - \alpha)(3\alpha - 1))\mathcal{A}(T_1^{k-1} \cup T_2^{k-1}) + 4\mathcal{A}(O^{k-1}) + \sum_{j=2}^{k-1} 2^{j+1} \mathcal{A}(O^{k-j}) \\ &= -(1 - \alpha)(3\alpha - 1)\alpha^2 \mathcal{A}(T_1^{k-2} \cup \dots \cup T_4^{k-2}) + [1 - (1 - \alpha)(3\alpha - 1)]\mathcal{A}(T_1^{k-2} \cup \dots \cup T_4^{k-2}) \\ &\quad + \sum_{j=2}^{k-1} 2^{j+1} \mathcal{A}(O^{k-j}) \end{aligned}$$

Étape 2 :

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= [1 - (1 - \alpha)(3\alpha - 1)(1 + \alpha^2)]\mathcal{A}(T_1^{k-2} \cup \dots \cup T_4^{k-2}) + 8\mathcal{A}(O^{k-2}) + \sum_{j=3}^{k-1} 2^{j+1} \mathcal{A}(O^{k-j}) \\ &= -(1 - \alpha)(3\alpha - 1)(1 + \alpha^2)\alpha^2 \mathcal{A}(T_1^{k-3} \cup \dots \cup T_8^{k-3}) + [1 - (1 - \alpha)(3\alpha - 1)]\mathcal{A}(T_1^{k-3} \cup \dots \cup T_8^{k-3}) \\ &\quad + \sum_{j=3}^{k-1} 2^{j+1} \mathcal{A}(O^{k-j}) \end{aligned}$$

Étape 3 :

$$\mathcal{B} = [1 - (1 - \alpha)(3\alpha - 1)(1 + \alpha^2 + \alpha^4)]\mathcal{A}(T_1^{k-3} \cup \dots \cup T_8^{k-3}) + 16\mathcal{A}(O^{k-3}) + \sum_{j=4}^{k-1} 2^{j+1} \mathcal{A}(O^{k-j})$$

·
·
·

Étape r , $r \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= [1 - (1 - \alpha)(3\alpha - 1)(1 + \alpha^2 + \dots + (\alpha^2)^{r-1})]\mathcal{A}(T_1^{k-r} \cup \dots \cup T_{2^r}^{k-r}) + 2^{r+1} \mathcal{A}(O^{k-r}) \\ &\quad + \sum_{j=r+1}^{k-1} 2^{j+1} \mathcal{A}(O^{k-j}) \end{aligned}$$

·
·
·

Étape $k - 1$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} &= [1 - (1 - \alpha)(3\alpha - 1)(1 + \alpha^2 + \dots + (\alpha^2)^{k-2})] \mathcal{A}(T_1^1 \cup \dots \cup T_{2^{k-1}}^1) + 2^k \mathcal{A}(O^1) \\
&= [1 - (1 - \alpha)(3\alpha - 1)(1 + \alpha^2 + \dots + (\alpha^2)^{k-1})] \mathcal{A}(T_1 \cup \dots \cup T_{2^k}) \\
&= [1 - (1 - \alpha)(3\alpha - 1)(1 + \alpha^2 + \dots + (\alpha^2)^{k-1})] \mathcal{A}(T) \\
&= \left(1 - (1 - \alpha)(3\alpha - 1) \left[\frac{1 - \alpha^{2k}}{1 - \alpha^2} \right] \right) \mathcal{A}(T) \\
&= \left(1 - \frac{(3\alpha - 1)(1 - \alpha^{2k})}{1 + \alpha} \right) \mathcal{A}(T)
\end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, on obtient : } \mathcal{A}(S) \leq \left(1 - \frac{(3\alpha - 1)(1 - \alpha^{2k})}{1 + \alpha} \right) \mathcal{A}(T)$$

Temps 5 : Soit $\varepsilon > 0$: Choisissons $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1[$ et $k \in \mathbb{N}$ de sorte que :

$$\left(1 - \frac{(3\alpha - 1)(1 - \alpha^{2k})}{1 + \alpha} \right) \mathcal{A}(T) \leq \varepsilon$$

Argument heuristique :

On cherche à faire tendre α vers 1 (toujours avec $\alpha < 1$), de sorte que :

$$1 - \frac{(3\alpha - 1)(1 - \alpha^{2k})}{1 + \alpha} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1 - \frac{3\alpha - 1}{1 + \alpha} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 1^-} 0$$

$\mathcal{A}(T) > 0$, on pose $\lambda = \frac{\varepsilon}{\mathcal{A}(T)} > 0$, et on impose $\varepsilon < \mathcal{A}(T)$, de sorte que $\lambda < 1$.

Soit $\eta = \frac{\lambda}{4} \in]0, \frac{1}{2}[$, on pose alors $\alpha = 1 - \eta \in]\frac{1}{2}, 1[$.

Puisque $\alpha < 1$, $\alpha^{2k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$.

Ainsi, pour $\eta > 0$, $\exists K \in \mathbb{N}$, $\forall k \geq K$, $0 < \alpha^{2k} \leq \eta$.

Ainsi, $\forall k \geq K$:

$$\begin{aligned}
1 - \frac{(3\alpha - 1)(1 - \alpha^{2k})}{1 + \alpha} &= \frac{2(1 - \alpha) + (3\alpha - 1)\alpha^{2k}}{1 + \alpha} \\
&\leq 2(1 - \alpha) + (3\alpha - 1)\alpha^{2k} \\
&= 2\eta + (2 - 3\eta)\alpha^{2k} \\
&\leq \frac{\lambda}{2} + 2\alpha^{2k} \\
&\leq \frac{\lambda}{2} + 2\frac{\lambda}{4} \\
&= \lambda
\end{aligned}$$

Finalement, $\forall k \geq K$, avec la figure S obtenue pour $\alpha = 1 - \eta$ et k , on a :

$$\mathcal{A}(S) \leq \left(1 - \frac{(3\alpha - 1)(1 - \alpha^{2k})}{1 + \alpha} \right) \mathcal{A}(T) \leq \varepsilon$$

□

Maintenant que nous possédons cet ensemble S , à partir de T quelconque (à bien choisir par la suite), nous allons le travailler quelque peu pour qu'une aiguille unité puisse y balayer continument un secteur angulaire d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Pour cela, nous allons "ajouter" à S un nombre fini d'ensembles d'aires aussi petites que souhaitées, que nous appellerons à termes des "antennes". Le but de ces antennes est de pouvoir faire passer continument une aiguille d'une droite parallèle à une autre.

2.3 Problème des aiguilles parallèles

Lemme 2.2.

Soient (L_1) et (L_2) deux droites parallèles du plan.
 $\forall \varepsilon > 0, \exists \mathbb{E} \subset \mathbb{R}^2$ une partie du plan, contenant (L_1) et (L_2) , telle que $\mathcal{A}(\mathbb{E}) < \varepsilon$,
 et telle qu'un segment unité puisse être continument déplacé de (L_1) à (L_2) sans sortir de \mathbb{E} .

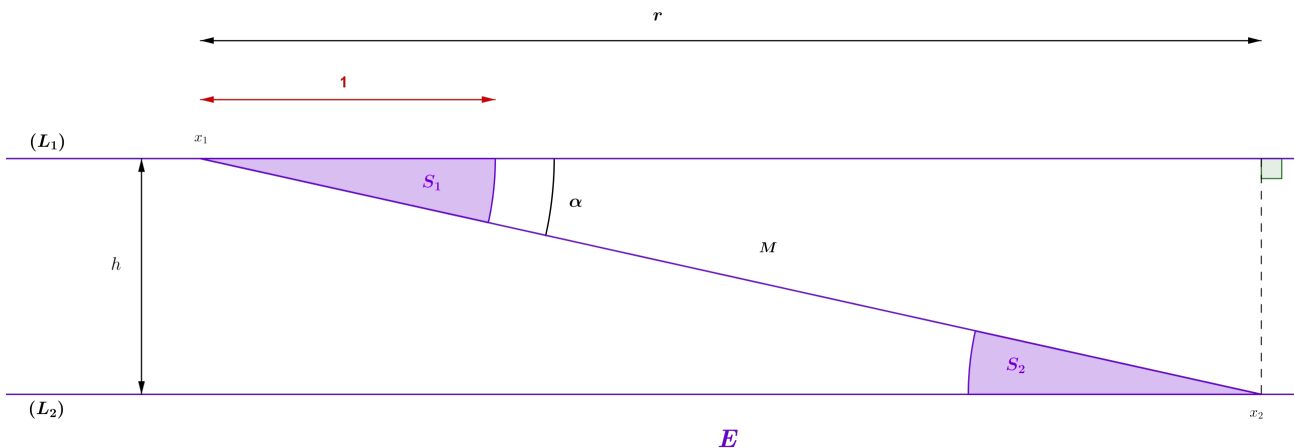


FIGURE 12 – Ensemble E

Démonstration.

Soient $x_1 \in (L_1), x_2 \in (L_2)$.

Soient h la distance entre (L_1) et (L_2) , et r la distance entre x_1 et le projeté de x_2 sur (L_1) .

Soient $M = [x_1x_2]$ le segment reliant x_1 et x_2 , et S_1, S_2 les secteurs angulaires respectivement entre (L_1) et M , et M et (L_2) , balayés par un segment unité de sommets x_1 et x_2 respectivement.

On pose alors $\mathbb{E} = (L_1) \cup (L_2) \cup M \cup S_1 \cup S_2$.

Les deux secteurs angulaires ont le même angle d'ouverture, noté $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}[$.

Ayant muni \mathbb{R}^2 de la mesure de Lebesgue, \mathcal{A} , l'aire de $(L_1), (L_2)$ et M soit nulle.

Ainsi, $\mathcal{A}(\mathbb{E}) = \mathcal{A}(S_1) + \mathcal{A}(S_2) = 2\mathcal{A}(S_1) = 2(\frac{\alpha}{2}) = \alpha$.

Puisque $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}[$, et $\tan(\alpha) = \frac{h}{r}$, il vient : $\alpha = \text{Arctan}(\frac{h}{r})$.

Donc, $\mathcal{A}(\mathbb{E}) = \text{Arctan}(\frac{h}{r})$.

Soit $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbb{E}) < \varepsilon &\Leftrightarrow \operatorname{Arctan}\left(\frac{h}{r}\right) < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \frac{h}{r} < \tan(\varepsilon) \\ &\Leftrightarrow r > \frac{h}{\tan(\varepsilon)}. \end{aligned}$$

(h est fixé.)

Ainsi, $\forall r > \frac{h}{\tan(\varepsilon)}$, \mathbb{E} convient puisque l'on peut déplacer continument un segment unité de (L_1) à (L_2) en :

- le faisant translater jusqu'en x_1 ,
- tourner dans S_1 autour de x_1 jusqu'à M ,
- translater sur M jusqu'en x_2 ,
- et tourner dans S_2 autour de x_2 jusqu'à (L_2) .

□

A ce stade, nous avons tous les outils en main pour démontrer la réponse de Besicovitch au problème de Kakeya :

Une aiguille unité peut être continument retournée dans le plan, en balayant un ensemble de mesure aussi petite que souhaitée.

Construisons donc un tel ensemble !

2.4 Construction de l'ensemble de Besicovitch

Théoreme 2.2.

Soit $\varepsilon > 0$:

$\exists U \subset \mathbb{R}^2$ une partie du plan d'aire $\mathcal{A}(U) \leq \varepsilon$, à l'intérieur de laquelle on peut retourner continument un segment de longueur unité. (ie : à l'intérieur de laquelle un segment unité peut être continument déplacé pour finir dans sa position initiale, mais ayant subi une rotation d'un angle π .)

Démonstration.

Étape 1 : Nous allons construire un ensemble $U_0 \subset \mathbb{R}^2$ de mesure aussi petite que souhaitée, de sorte qu'un segment unité puisse y balayer un secteur angulaire d'angle $\frac{\pi}{3}$ par rapport à son sommet :

Soit $\varepsilon > 0$:

Soit T un triangle équilatéral de hauteur unité, aligné sur une droite (L) , de base de longueur $b = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

On divise sa base en $2^k = m$ segments de même longueur $\frac{b}{2^k}$, formant ainsi 2^k triangles élémentaires T_1, \dots, T_{2^k} .

En choisissant $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1[$ et k assez grand, le théorème précédent permet de construire une partie S_0 du plan, d'aire $\mathcal{A}(S_0) \leq \frac{\varepsilon}{6}$, obtenue en translatant les 2^k triangles élémentaires le long de (L) .

Les 2^k triangles T_1, \dots, T_{2^k} sont toujours présents sur la figure S_0 , dans le même ordre (de T_1 à T_{2^k} de la gauche vers la droite en considérant leurs bases), mais ils se chevauchent.

On les renomme T'_1, \dots, T'_{2^k} . Notons que l'aiguille est placée en $[AB]$, segment inclus dans le côté gauche de $T_1 = T'_1$, A étant le sommet du triangle T .

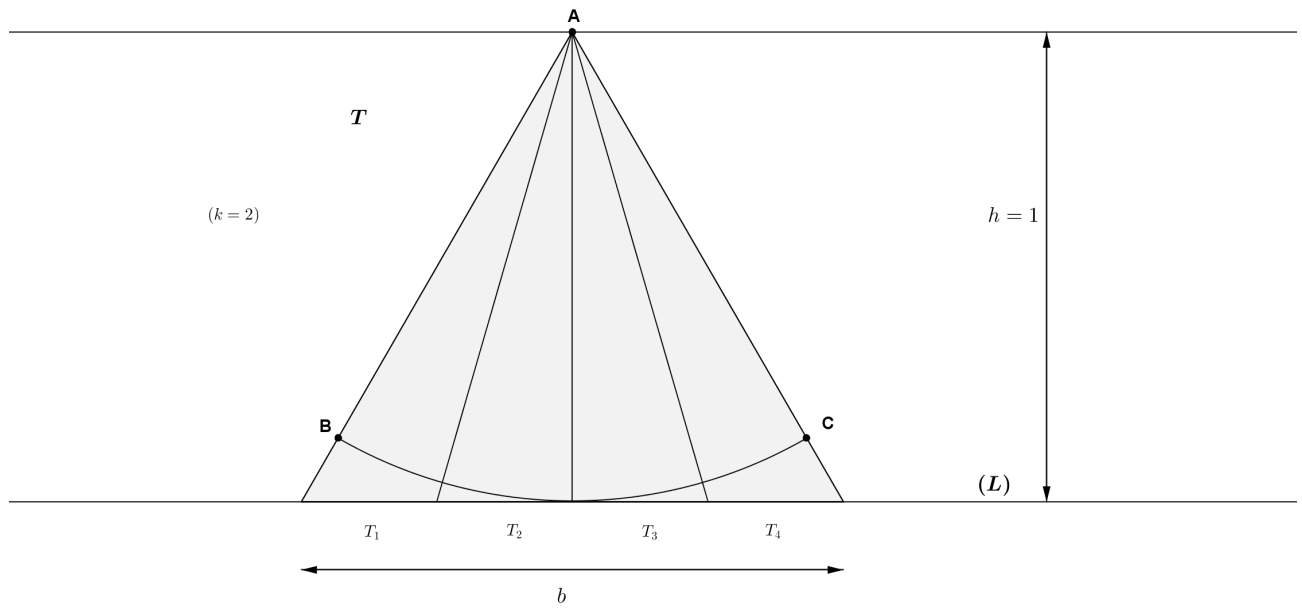


FIGURE 13 – Étape 1 : Partition de T en T_1, T_2, T_3, T_4

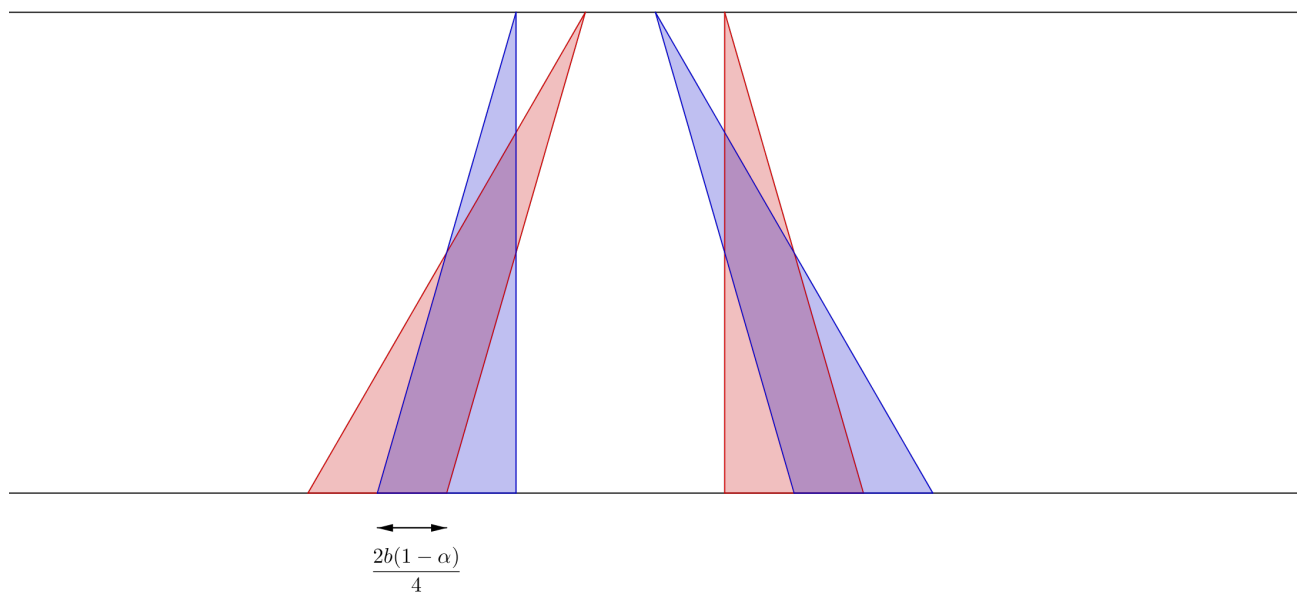


FIGURE 14 – Étape 1 : Translation de T_{2i} vers T_{2i-1}

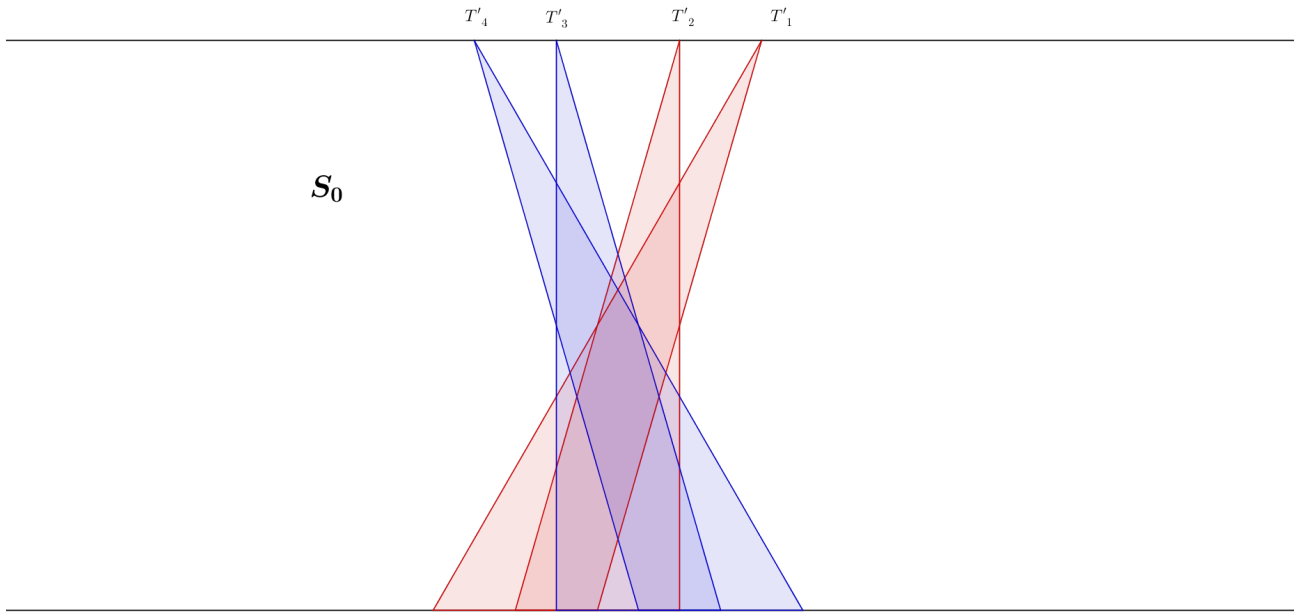


FIGURE 15 – Étape 2 : Figure résultante S_0

On fait subir une rotation autour de A à l'aiguille dans le secteur angulaire balayé par T_1 , de sorte qu'elle aille se juxtaposer au côté droit de T_1 .

Celui-ci est parallèle au côté gauche de T'_2 . Ainsi, via le lemme 2.2, en construisant un ensemble supplémentaire E_1 d'aire $\mathcal{A}(E_1) = \frac{\varepsilon}{6m}$ associé à S_0 , on fait se déplacer continument l'aiguille jusqu'au côté gauche de T'_2 , tout en restant dans E_1 . Visuellement, on a "ajouté" une première paire d'antennes à S_0 . Nous faisons alors subir une rotation à l'aiguille autour du sommet de T'_2 , de sorte qu'elle se juxtapose au côté droit de T'_2 , sans sortir du secteur angulaire balayé par T'_2 .

Le côté droit de T'_2 étant parallèle au côté gauche de T'_3 , via le lemme 2.2, on fait passer continument l'aiguille du côté droit de T'_2 au côté gauche de T'_3 en restant dans un ensemble supplémentaire E_2 du plan, d'aire $\frac{\varepsilon}{6m}$. Puis on fait subir une rotation à l'aiguille autour du sommet de T'_3 , jusqu'à la juxtaposer au côté droit de T'_3 , sans sortir du secteur angulaire balayé par T'_3 .

On réitère ces opérations, de sorte qu'à la i^{eme} étape, ($i \in \llbracket 1, 2^k - 1 \rrbracket$), l'aiguille soit placée sur le côté droit de T'_i , parallèle au côté gauche de T'_{i+1} . Via le lemme 2.2, on fait passer continument l'aiguille sur le côté gauche de T'_{i+1} , en restant dans un ensemble supplémentaire E_i du plan, d'aire $\frac{\varepsilon}{6m}$. Puis on fait subir une rotation à l'aiguille autour du sommet de T'_{i+1} , jusqu'à la juxtaposer au côté droit de T'_{i+1} , sans sortir du secteur angulaire balayé par T'_{i+1} .

A la dernière étape, ($i = 2^k - 1$), on a finalement déplacé continument l'aiguille de sa position initiale sur le côté droit de T'_{2^k} (sans sortir de S_0 et des ensembles supplémentaires E_i , $i \in \llbracket 1, 2^k - 1 \rrbracket$). Étant parallèle au côté droit de T'_{2^k} , toujours via le lemme 2.2, on fait passer continument l'aiguille sur le côté droit de T'_{2^k} , en restant dans un ensemble supplémentaire E_{2^k} du plan, d'aire $\frac{\varepsilon}{6m}$. Visuellement, nous avons "ajouté" 2^k paires d'antennes à S_0 à l'issue de ces déplacements de l'aiguille. Ainsi, on a continument déplacé l'aiguille de sa position initiale $[AB]$ (côté gauche de T) à sa position finale $[AC]$ (côté droit de T), de sorte qu'elle ait balayé un secteur angulaire d'angle $\frac{\pi}{3}$ autour de son sommet, A .

Ceci sans sortir de l'ensemble $U_0 = S_0 \cup \left(\bigcup_{i=1}^{2^k} E_i\right)$ du plan, d'aire :

$$\mathcal{A}(U_0) \leq \mathcal{A}(S_0) + \sum_{i=1}^{2^k} \mathcal{A}(E_i) = \frac{\varepsilon}{6} + 2^k \left(\frac{\varepsilon}{6m}\right) = 2\frac{\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

$$\mathcal{A}(U_0) \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

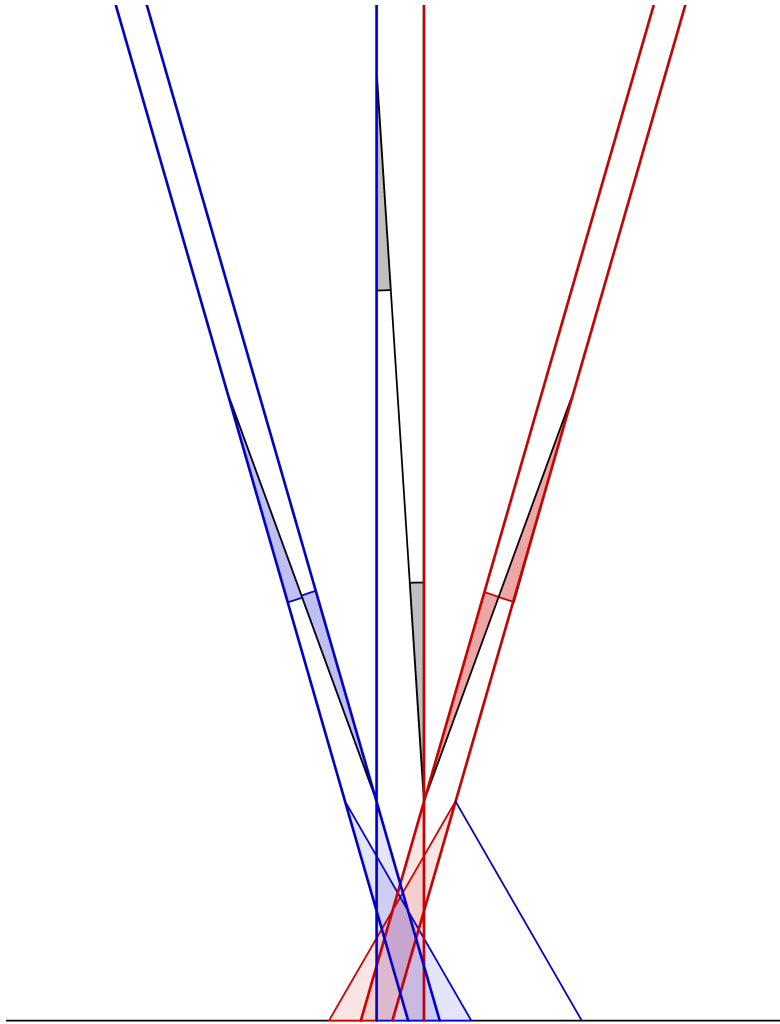


FIGURE 16 – S_0 muni de trois paires d'antennes

Étape 2 : On réplique trois fois la même construction :

Soient les ensembles U_0 , U_1 et U_2 construits comme à l'étape 1, que l'on juxtapose de sorte que les trois triangles équilatéraux (T) servant à l'amorce de la construction soient adjacents dans le plan. Ils balayent un secteur angulaire d'angle π .

Ainsi, l'ensemble $U = U_0 \cup U_1 \cup U_2$ est d'aire $\mathcal{A}(U) \leq 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$.

On constate, par l'étape 1, que l'on peut déplacer continument l'aiguille dans U , de sorte qu'elle revienne à sa position initiale, après avoir subi une rotation d'angle $3\frac{\pi}{3} = \pi$.

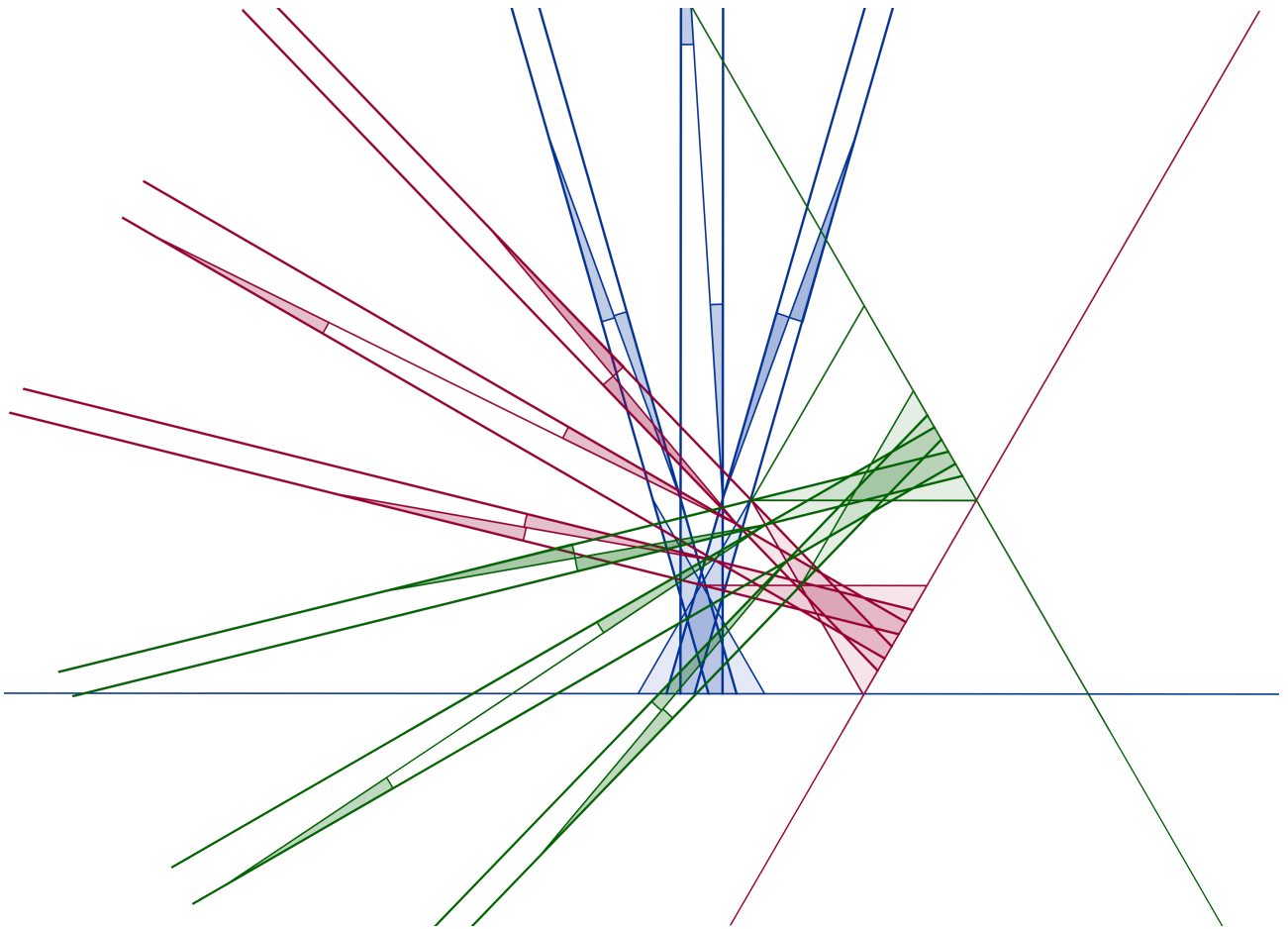


FIGURE 17 – U

Finalement :

$\forall \varepsilon > 0, \exists U \subset \mathbb{R}^2$ d'aire $\mathcal{A}(U) \leq \varepsilon$, tel qu'on puisse continument retourner une aiguille de longueur unité dans le plan, sans sortir de l'ensemble U .

□

Conclusion :

Lorsqu'en 1917, Kakeya pose la fameuse question ouverte qui reçoit communément le nom de Problème de Kakeya, (Quelle est l'ensemble du plan d'aire minimale dans lequel un segment unité peut être continument retournée ?), beaucoup étaient loin d'imaginer la réponse surprenante que Besicovitch apporta en 1928.

Après des années de recherche et de confrontations aux figures empiriques "usuelles", difficile de croire le résultat proposé par Besicovitch, si étonnant parce qu'allant à l'encontre du sens commun :

Il n'y a pas d'ensemble d'aire minimale qui réponde au Problème de Kakeya, puisque l'on peut retourner continument un segment unité dans le plan en balayant une aire aussi petite que souhaitée!

Voilà qui clôt de façon inattendue le problème de Kakeya, et ouvre la porte à de nombreuses extensions de ce problème :

Si l'on ajoute une condition de convexité, ou bien si l'on demande que l'ensemble où s'effectue le retournement de l'aiguille soit étoilé, que deviennent les solutions au Problème de Kakeya ?

Et si, au contraire, on retire l'hypothèse de continuité dans le déplacement de l'aiguille (ie : si l'on autorise à soulever l'aiguille du plan), existe-t-il un ensemble d'aire minimale qui contienne un segment unité dans chaque direction du plan ?

Peut-on atteindre l'aire nulle ?

3 Bibliographie

1. V. BORRELLI, J. RULLIÈRE, *En cheminant avec Kakeya, Voyage au coeur des mathématiques*, ENS Editions, 2014.
<http://catalogue-éditions.ens-lyon.fr/>
2. K.J. FALCONER, *Cambridge Tracts in Mathematics, the geometry of fractal sets*, Cambridge University Press, 1985.
<https://books.google.fr/>